Momento angular IV

$$[J_i, J_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} J_k$$

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad , \quad \text{etc.}$$

$$[J^2, J_i] = 0$$

Escogemos z como eje de cuantización

$$J^2 |\gamma, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |\gamma, j, m\rangle$$
$$J_z |\gamma, j, m\rangle = \hbar m |\gamma, j, m\rangle$$

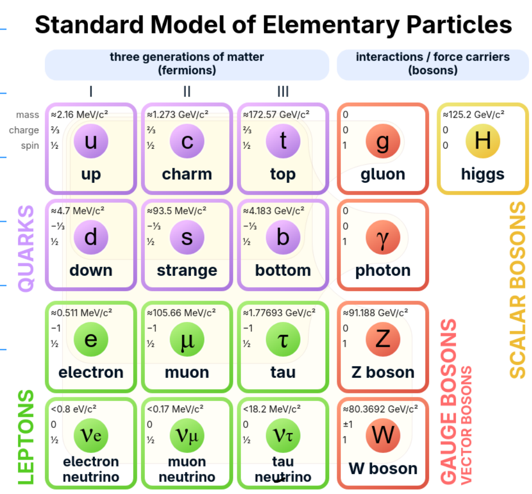
$$-j \leq m \leq j$$

- Los distintos valores de m, están separados por enteros

$$J_\pm = J_x \pm i J_y$$

- Con J_+ y J_- podemos obtener un e-vector con e-valor de proyección $\hbar(m+1)$ o $\hbar(m-1)$ a partir de $|\gamma, j, m\rangle$
- $2j$ debe ser entero.

$j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Bosones
$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ Fermiones



Para un j dado, los valores de m posibles son

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

Bosones					
$j=2$	•	•	•	•	•
$j=1$		•	•	•	
$j=0$			•		
m	-2	-1	0	1	2

Fermiones						
$j=\frac{5}{2}$	•	•	•	•	•	•
$j=\frac{3}{2}$		•	•	•	•	
$j=\frac{1}{2}$			•	•		
	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$

Si j es entero, m es entero
Si j es semi-entero, m es semi-entero

- Si tenemos dos e-vectores que corresponden a distinto e-valor entonces son ortogonales.

$$\langle \gamma, j', m' | \gamma, j, m \rangle = \delta_{j'j}\,\delta_{m'm}$$

como siempre, elegimos a $|\gamma, j, m\rangle$ normalizado

- Ya sabemos que $J_\pm |\gamma, j, m\rangle$ es e-vector de J^2, J_z con e-valores $\hbar^2 j(j+1)$ y $\hbar(m\pm1)$. Estaría suave tener una expresión

$$J_\pm |\gamma, j, m\rangle = C\,|\gamma, j, m\pm1\rangle$$

Calculando la norma de $J_\pm |\gamma, j, m\rangle$

$$\langle \gamma, j, m | J_\mp J_\pm | \gamma, j, m\rangle = \langle \gamma, j, m | J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z | \gamma, j, m\rangle$$

$$= \cancelto{1}{\langle \gamma, j, m | \gamma, j, m\rangle} \left(\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 \mp \hbar^2 m\right)$$

$$\| J_\pm |\gamma, j, m\rangle \|^2 = |c|^2 \, \cancel{\| |\gamma, j, m\rangle \|^2}^{\,1}$$

$$\boxed{\therefore \; J_\pm |\gamma, j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)} \; |\gamma, j, m\pm1\rangle}$$

Para esta base

$$\langle \gamma', j', m' | \gamma, j, m\rangle = \delta_{j'j}\, \delta_{m'm}\, \delta_{\gamma'\gamma}$$

$$\sum_j \sum_{m=-j}^{j} \sum_\gamma |\gamma, j, m\rangle\langle \gamma, j, m| = \mathbb{1}$$

Ya teniendo esta base y sabiendo cómo operan los operadores sobre ella podemos calcular representaciones matriciales de J^2, J_z, J_+, J_-, J_x, J_y

Usando la base

$$\beta = \{ |\gamma, j, m\rangle : j \in J, \; m = -j, \dots, j, \; \gamma \in \Gamma \}$$

$$\langle \gamma', j', m' | J^2 | \gamma, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\, \delta_{\gamma\gamma'}\, \delta_{jj'}\, \delta_{mm'}$$

$$\langle \gamma', j', m' | J_z | \gamma, j, m\rangle = \hbar m\, \delta_{\gamma\gamma'}\, \delta_{jj'}\, \delta_{mm'}$$

$$\langle \gamma', j', m' | J_+ | \gamma, j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\; \delta_{\gamma\gamma'}\, \delta_{jj'}\, \delta_{m'\, m+1}$$

$$\langle \gamma', j', m' | J_- | \gamma, j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\; \delta_{\gamma\gamma'}\, \delta_{jj'}\, \delta_{m'\, m-1}$$

$$J_x |\gamma, j, m\rangle = \; ?$$

$$J_+ = J_x + iJ_y$$
$$J_- = J_x - iJ_y \implies J_x = \frac{J_+ + J_-}{2} \qquad J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$$

Ejemplos:

Como γ no afecta la estructura de las matrices, lo ignoraremos (vamos a usar la base $|j, m\rangle$)

i) $j=0 \longrightarrow$ Valores posibles de m sólo es el $m=0$

Base

$$\beta = \{ |j=0, m=0\rangle \}$$

ii) $j=\frac{1}{2} \longrightarrow$ valores posibles de m
$m=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

Base

$$\beta = \{ \underbrace{|j=\tfrac{1}{2}, m=-\tfrac{1}{2}\rangle}_{|\downarrow\rangle}, \underbrace{|j=\tfrac{1}{2}, m=+\tfrac{1}{2}\rangle}_{|\uparrow\rangle} \}$$

notación común $|\downarrow\rangle$ $|\uparrow\rangle$

$$[J^2]_\beta = \begin{pmatrix} \langle\downarrow|J^2|\downarrow\rangle & \langle\downarrow|J^2|\uparrow\rangle \\ \langle\uparrow|J^2|\downarrow\rangle & \langle\uparrow|J^2|\uparrow\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$J^2|\uparrow\rangle = J^2|j=\tfrac{1}{2}, m=\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar^2 \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)|\uparrow\rangle$$
$$J^2|\downarrow\rangle = J^2|j=\tfrac{1}{2}, m=-\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar^2 \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)|\downarrow\rangle$$

$$\langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0, \quad \langle\uparrow|\uparrow\rangle = 1, \quad \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1$$

$$[J_z]_\beta = \begin{pmatrix} \langle\downarrow|J_z|\downarrow\rangle & \langle\downarrow|J_z|\uparrow\rangle \\ \langle\uparrow|J_z|\downarrow\rangle & \langle\uparrow|J_z|\uparrow\rangle \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$[J_+]_\beta = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad [J_-]_\beta = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[J_x]_\beta = \left[\frac{J_+ + J_-}{2}\right] = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$[J_y]_\beta = \left[\frac{J_+ - J_-}{2i}\right] = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

---

iii) $j = 0, 1 \longrightarrow$ Valores posibles de m

$j=0 \Rightarrow m=0$

$j=1 \Rightarrow m=-1,0,1$

Base $\beta = \{ |j=0, m=0\rangle, |j=1, m=-1\rangle, |j=1, m=0\rangle, |j=1, m=+1\rangle \}$

$= \{ |0,0\rangle, |1,-1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle \}$

$$[J_z]_\beta = \begin{pmatrix} \langle 00|J_z|00\rangle & \langle 00|J_z|1,-1\rangle & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ & & \langle 11|J_z|11\rangle \end{pmatrix}$$

Midiendo en distintos ejes

(para espín $j=\frac{1}{2}$)

$$[J_z]_\beta = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [J_x]_\beta = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e-valor

Los e-vectores de J_x son $\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = |\uparrow\rangle_x \quad \frac{\hbar}{2}$

$\frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = |\downarrow\rangle_x \quad -\frac{\hbar}{2}$

Si el sistema está en el
e-estado de J_z, $|\uparrow\rangle$

¿Que podemos obtener si medimos J_z?

Sale $\frac{\hbar}{2}$ y el estado queda $|\uparrow\rangle$

¿Que podemos obtener si medimos J_x?

$$|\uparrow\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_x + |\downarrow\rangle_x}{\sqrt{2}}$$

50% de veces $\frac{\hbar}{2}$

50% de veces $-\frac{\hbar}{2}$